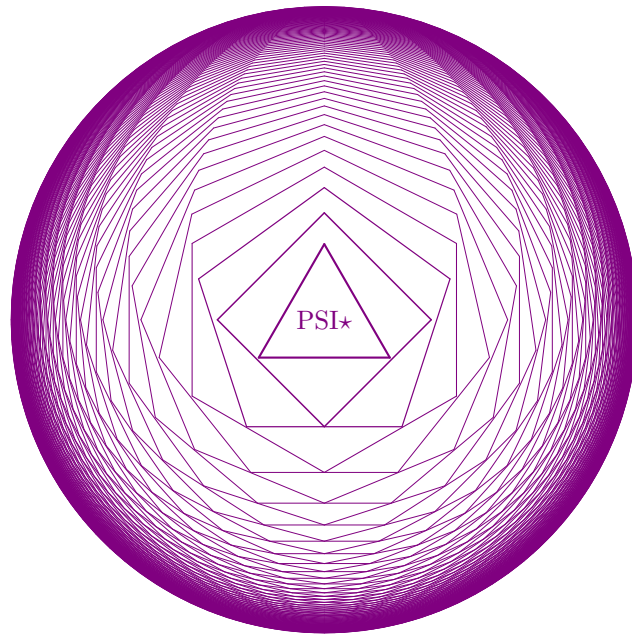


# Cahier de vacances



Ce document rassemble différents éléments pour réviser des points importants du cours de première année. Il peut être utilisé pour ne pas perdre la main avec une lecture active et régulière ou pour se rassurer avant la rentrée. Beaucoup de questions et d'exercices sont de difficultés raisonnables mais requièrent de réfléchir sur la base d'un cours déjà appris. Certains exercices un peu plus ambitieux sont signalés par un pictogramme 🍂.

Roger MANSUY  
@roger\_mansuy  
roger.mansuy@gmail.com

*Tenter, braver, persister, persévérer, être fidèle à soi-même, prendre corps à corps le destin, étonner la catastrophe par le peu de peur qu'elle nous fait, tantôt affronter la puissance injuste, tantôt insulter la victoire ivre, tenir bon, tenir tête.*

Victor HUGO

# 1 – Préliminaires

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit dessiner les opérations ensemblistes, énoncer les définitions d'applications injectives, surjectives, bijectives

## Vrai/Faux

	V	F
Soit $A, B, C$ trois parties. Alors, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $A, B, C$ trois parties. Alors, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$6\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$6\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $A, B$ des parties finies. Alors, $ A \cap B  +  A \cup B  =  A  +  B $ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $n \in \mathbb{Z}$ . Le cardinal de $\llbracket n - 1, 2n \rrbracket$ est $n + 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $n \in \mathbb{Z}$ . Le cardinal de $\llbracket -n - 1, n \rrbracket$ est $2n$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Il y a $10^k$ entiers naturels s'écrivant avec exactement $k$ chiffres en base 10.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Il y a 50 entiers pairs dans l'intervalle $[0, 100]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$ . Alors, $f(f^{-1}(B)) = B$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $f : E \rightarrow F$ et $B, C \subset F$ . Alors, $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $f : E \rightarrow F$ et $B, C \subset F$ . Alors, $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$ . Alors, la restriction de $f$ à $A$ est injective.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Exercices de révision

### Exercice

Remplir les boites  avec l'un des symboles suivants  $\Leftarrow, \Rightarrow$  ou  $\Leftrightarrow$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$x \geq 1 \quad \text{---} \quad x > 0$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$x \geq 1 \quad \text{---} \quad x > 0$$

3. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$x = y \quad \text{---} \quad x^2 = y^2$$

4. Soit  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Alors,

$$x = y \quad \text{---} \quad x^2 = y^2$$

5. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{---} \quad x = y$$

6. Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$x = y \quad \text{---} \quad xz = yz$$

7. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$|x| + |y| = 0 \quad \text{---} \quad |x + y| = 0$$

8. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$x > 0, y > 0 \quad \text{---} \quad xy > 0$$

9. Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$x > y > 0, z > 0 \quad \text{---} \quad xz > yz$$

10. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$x^2 < x \quad \text{---} \quad x < 1$$

**Exercice**

Remplir les boîtes  avec l'un des symboles suivants  $\Leftarrow$ ,  $\Rightarrow$  ou  $\Leftrightarrow$ .

1. Soit  $f, g : E \rightarrow F$ . Alors,

$$f = g \quad \text{input} \quad f(E) = g(E)$$

2. Soit  $f : E \rightarrow F, g : G \rightarrow F, h : E \rightarrow G$ . Alors,

$$f = g \circ h \quad \text{input} \quad f(E) \subset g(G)$$

3. Soit  $f : E \rightarrow F$ . Alors,

$$x = y \quad \text{input} \quad f(x) = f(y)$$

4. Soit  $f : E \rightarrow F$  surjective. Alors,

$$x = y \quad \text{input} \quad f(x) = f(y)$$

5. Soit  $f : E \rightarrow F$  injective. Alors,

$$x = y \quad \text{input} \quad f(x) = f(y)$$

6. Soit  $f : E \rightarrow F$  bijective. Alors,

$$x = y \quad \text{input} \quad f(x) = f(y)$$

7. Soit  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ . Alors,

$$g \circ f \text{ injective} \quad \text{input} \quad f \text{ injective}$$

8. Soit  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ . Alors,

$$g \circ f \text{ injective} \quad \text{input} \quad f, g \text{ injectives}$$

**Exercice**

Considérons l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^2 + n + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  n'est pas injective.
2. Étudier l'injectivité de la restriction de  $f$  à  $\mathbb{N}$ .

**Exercice (🔥)**

Soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que  $f$  est injective si, et seulement si,

$$\forall A \subset E, \quad A = f^{-1}(f(A)).$$

## 2 – Complexes

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les règles de manipulations de la conjugaison, des parties réelles et imaginaires, du module, se souvenir de la méthode de résolution des équations de degré 2 et énoncer la forme des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

### Vrai/Faux

	V	F
Soit $z \in \mathbb{C}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, $\Re(\lambda z) = \lambda \Re(z)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ . Alors, $\Re(\frac{1}{z}) = -\Re(z)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $z \in \mathbb{C}$ . La partie réelle de $iz$ est la partie imaginaire de $z$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $x \in \mathbb{R}$ . Le conjugué de $\exp(ix)$ est $\exp(-ix)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Le module de $\exp(z)$ est $\exp( z )$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $z \in \mathbb{C}$ . Le conjugué de l'exponentielle de $z$ est l'exponentielle de $\bar{z}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $z_1$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ . Alors, $ z_1 - z_2  \leq  z_1  -  z_2 $ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $z_1$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ . Alors, $ z_1 - z_2  \leq  z_1  +  z_2 $ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le complexe $-j$ est racine de $X^2 - X + 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $m$ ne divise pas $n$ , $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \{1\}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### QCM

1. L'ensemble des complexes  $z$  tels que  $\Re(z) = \Im(z)$  est décrit par l'équation

- a.  $|z + 1| = |z - i|$                                       c.  $|z + 1| = |z + i|$   
b.  $|z - 1| = |z - i|$                                       d.  $|z - 1| = |z + i|$

La quantité  $|z - z'|$  s'interprète comme la distance entre les points d'affixes  $z$  et  $z'$ .

2. Les racines de  $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$  sont

- a. imaginaires pures                                      c.  $e^{i\theta}$  et  $\frac{1}{e^{i\theta}}$   
b.  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$                                       d.  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$

3. Si  $\omega \in \mathbb{U}_n$ , alors

- a.  $\omega^3 \in \mathbb{U}_{3n}$     c.  $\omega^3 \in \mathbb{U}_{\frac{n}{3}}$  si  $n = 0[3]$   
b.  $\omega^3 \in \mathbb{U}_n$     d.  $\omega^3 = 1$

4.  $\mathbb{U}_d$  est inclus dans  $\mathbb{U}_n$  si

- a.  $d \leq n$     c.  $d|n$   
b.  $n \leq d$     d.  $n|d$

## Exercices de révision

### Exercice

Parmi les triangles  $ABC$  suivant lesquels sont rectangles ? isocèles ? équilatéraux ?

Affixes	rectangle	isocèle	équilatéral
$A(0), B(4i), C(-19)$			
$A(0), B(4i), C(2 + 2i)$			
$A(j), B(1), C(\bar{j})$			

Trouver les  $z \in \mathbb{C}$  tels que

Affixes	rectangle	isocèle	équilatéral
$A(0), B(4i), C(z)$	✓	✓	∅

Il y a six solutions à cette question et l'on peut le comprendre par un dessin judicieux.

### Exercice

Dessiner les points dont les affixes vérifient  $|z + 1| \leq 2$  et  $|z| \leq 1$ .

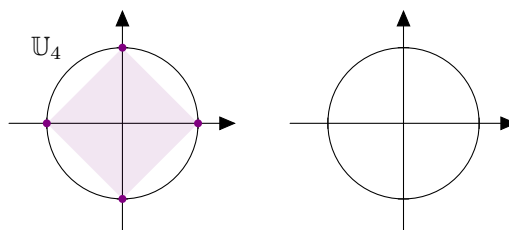
### Exercice

Dessiner les points dont les affixes vérifient  $|z - 1| = |\bar{z} + i|$ .

Le module au carré est davantage manipulable que le module. En particulier, pour se débarrasser d'un complexe au dénominateur, on multiplie par le conjugué.

### Exercice

Dessiner les points dont les affixes sont les racines 4-èmes de  $-1$ .



### Exercice

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ . Montrer que l'équation  $z^2 + a\bar{z} + b = 0$  admet au plus quatre solutions.

### Exercice (🔥)

Résoudre l'équation  $z^n = \bar{z}$ .

Pour gérer une expression de la forme  $e^{ia} \pm e^{ib}$ , on factorise par  $e^{i\frac{a+b}{2}}$ .

### Exercice

Déterminer un argument de  $e^{i\frac{\pi}{5}} - i$ .

# 3 – Fonctions usuelles

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit se souvenir des domaines de définition des fonctions trigonométriques réciproques.

## Vrai/Faux

	V	F
La fonction $x \mapsto  \cos(3\pi x) $ est $1/3$ -périodique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f$ est périodique, alors $g \circ f$ est périodique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La composée de deux fonctions impaires est paire.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \in ]x - 1, x + 1[$ . Alors, $n = \lfloor x \rfloor$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ , $ \ln(x)  \leq  x - 1 $ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ , $m, n \in \mathbb{N}$ , $x^m + x^n \leq x^{m+n}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ , $m, n \in \mathbb{N}$ , $1 + x^n \leq x^{m+n}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La fonction th tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\arccos 0 = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout $x \in [0, \pi]$ , $\arcsin(\sin(x)) = x$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout $x \in [-1, 1]$ , $\cos(\arccos(x)) = x$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

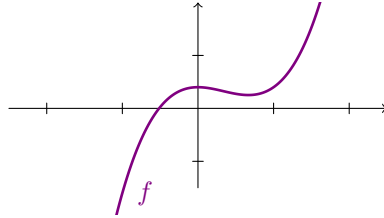
## QCM

- Si  $f$  est paire et  $g$  est impaire, alors  $f \circ g$  est
  - paire
  - impaire
  - on ne sait pas
  - paire et impaire
- L'application  $\begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\sin x)^2 \end{cases}$  est
  - injective et non surjective
  - non injective et non surjective
  - non injective et surjective
  - injective et surjective
- $\arccos(\cos \frac{17}{3}\pi)$  est
  - $\frac{17}{3}\pi$
  - $\frac{2}{3}\pi$
  - $\frac{1}{3}\pi$
  - $-\frac{1}{3}\pi$
- La fonction  $\arccos$  est dérivable sur
  - $]0, \pi[$
  - $[0, \pi]$
  - $] - 1, 1[$
  - $[-1, 1]$
- L'ensemble des solutions de  $\operatorname{ch}(x) = \operatorname{sh}(x)$  est
  - $\{0\}$
  - $\{\pm 1\}$
  - $\{0, \pm 1\}$
  - $\emptyset$
- L'ensemble des solutions de  $\tan x = \sqrt{3}$  est
  - $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - $\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - $\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

## Exercices de révision

### Exercice

Tracer les courbes représentatives de  $g : x \mapsto f(x+1)$  et  $h : x \mapsto f(2-x)$  à partir de la courbe de  $f$  suivante



### Exercice

Déterminer les  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $x \mapsto x^\alpha \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  admette une limite finie en  $+\infty$  et en 0.

### Exercice

Soit  $a < b$ . Déterminer les extremums de la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  sur  $[a, b]$ .

### Exercice (🔥)

Déterminer l'abscisse du premier maximum local sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$ .

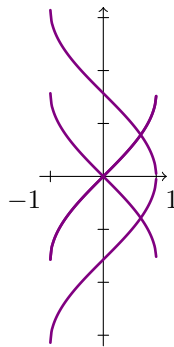
### Exercice

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b \in \mathbb{R}$  pour qu'il existe  $A \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = A \operatorname{ch}(x + \varphi).$$

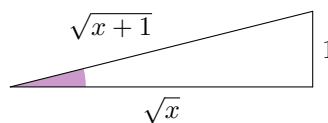
### Exercice

Reconnaître les courbes représentatives de  $x \mapsto \arccos(x)$ ,  $x \mapsto -\arccos(x)$ ,  $x \mapsto \arcsin(x)$ ,  $x \mapsto \arcsin(-x)$  et  $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$  sur la figure suivante



### Exercice

Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $\arctan \frac{1}{\sqrt{x}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ .



# 4 – Suites

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler la définition quantifiée de convergence d'une suite réelle ou complexe et énoncer le théorème d'encadrement et le théorème de limite monotone.

## Vrai/Faux

	V	F
Si la suite $(\cos u_n)_n$ converge, alors la suite $(\sin u_n)_n$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la suite réelle $(u_n^3)_n$ converge, alors la suite $(u_n^2)_n$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la suite complexe $(u_n^3)_n$ converge, alors la suite $(u_n^2)_n$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une suite monotone converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Deux suites bornées $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_n - v_n \rightarrow 0$ convergent vers la même limite.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le maximum de deux suites réelles convergentes définit une suite convergente.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite alors $(u_n)_n$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Calculs

Associer à chaque terme général de la suite de gauche, la limite correspondante à droite

$n^2 e^{-n^3}$	•	0
$\arctan(n)$	•	$e^{-2}$
$(1 - \frac{2}{n})^n$	•	$\ln(2)$
$\frac{e^n + 1}{e^{2n} + 1}$	•	$\pi/4$
$\arccos(1/n)$	•	1
$n^3 e^{-n^2}$	•	$\pi/2$
$\frac{n+n^2}{\sqrt{n+n^2}}$	•	
$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$	•	

## Exercices de révision

### Exercice

Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_n$  définie, pour tout  $n$ ,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^{\frac{3}{2}}}}$$

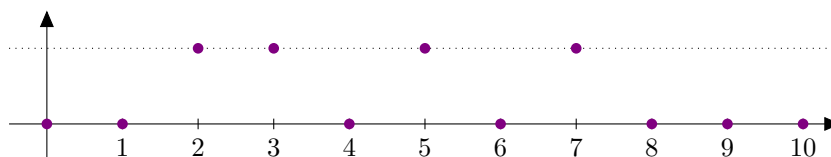
### Exercice

Soit  $(u_n)_n$  telle que, pour tous  $n$ ,  $p > 0$ ,  $0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$ .  
Montrer que  $(u_n)_n$  converge.

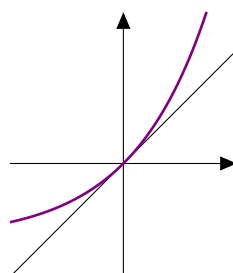


**Exercice**

Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_n$  définie par  $u_n = 1$  si  $n$  est premier, 0 sinon.

**Exercice**

Étudier la suite  $(u_n)_n$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$ .

**Exercice**

Soit  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites équivalentes de limite  $+\infty$ .

1. Montrer que  $\ln u_n \sim \ln v_n$ .
2. Montrer que l'affirmation  $\exp u_n \sim \exp v_n$  peut être fausse.

**Exercice**

Soit  $(u_n)_n$  croissante telle que  $(u_{2n})_n$  converge. Montrer que  $(u_n)_n$  converge.

**Exercice (lemme de Fekete) (♣)**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite positive telle que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

Montrer que la suite  $(\frac{u_n}{n})_{n \geq 1}$  converge vers

$$\ell = \inf \left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

INDICATION : on pourra fixer un entier  $k$  et utiliser la division euclidienne de  $n$  par  $k$ .

# 5 – Continuité

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit énoncer la définition de la continuité en un point, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des « bornes atteintes » (avec leurs hypothèses).

## Vrai/Faux

	V	F
La composée de deux fonctions continues est continue.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une fonction strictement monotone réalise une bijection entre un intervalle $I$ et $f(I)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $c \in ]a, b[$ , il existe $y$ entre $f(a)$ et $f(b)$ tel que $y = f(c)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une fonction continue est bornée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une fonction périodique est bornée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si une fonction $f$ est bornée, strictement positive, alors $\frac{1}{f}$ est bornée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ni minorée, ni majorée est surjective.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur tous les segments inclus dans $]a, b[$ , $f$ est bornée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
L'image réciproque d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La fonction $x \mapsto \frac{\cos x - 1}{ x }$ est prolongeable par continuité en 0.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Exercices de révision

### Exercice

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée. Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont bornées.

### Exercice

Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}_+$  de  $f : x \mapsto \sup\{\frac{x^n}{n!}, n \in \mathbb{N}\}$ .

### Exercice

Soit  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

- $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ ,
- $g$  est périodique,
- $f + g$  est croissante.

Justifier que  $g$  est constante.

### Exercice

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $x_1, \dots, x_n \in ]0, 1[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

### Exercice (théorème des cordes universelles)

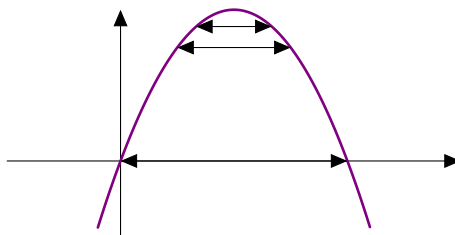
Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue telle que  $f(0) = f(1)$  et  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

1. Posons

$$g : \begin{cases} [0, 1 - \frac{1}{n}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \end{cases}$$

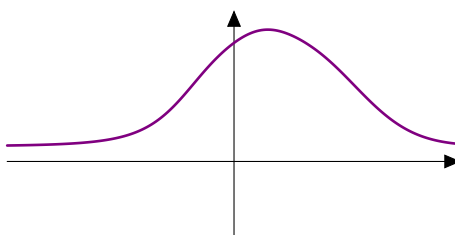
Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})$ .

2. En déduire qu'il existe  $\alpha_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$  tel que  $f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$ .



### Exercice

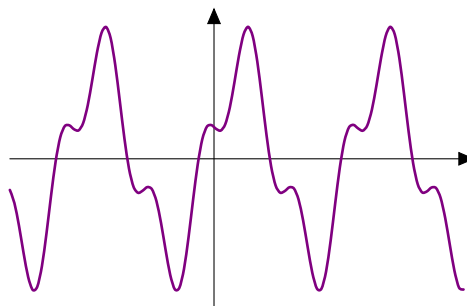
Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et admettant des limites finies en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée.



### Exercice

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $T$ -périodique.

Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\mathbb{R}) = f([a, a + \frac{T}{2}])$ .



### Exercice (🔥)

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Établir la convergence de la suite  $(u_n)_n$  définie par

$$u_n = \max \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right), 0 \leq k \leq n \right\}.$$

# 6 – Dérivabilité

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit énoncer les théorèmes de Rolle et des accroissements finis, rappeler le lien entre signe de la dérivée et monotonie (avec les hypothèses).

## Vrai/Faux

	V	F
La dérivée de $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est $x \mapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La fonction $x \mapsto  x $ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La fonction $x \mapsto x x $ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f$ admet un maximum en $a$ et est dérivable en $a$ , alors $f'(a) = 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La dérivée d'un polynôme réel scindé à racines simples est scindée à racines simples.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si une fonction réelle est de classe $\mathcal{C}^n$ et admet $n + 1$ zéros distincts sur un intervalle, alors sa dérivée $n$ -ième s'annule au moins une fois.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f$ est à dérivée positive sur un intervalle, alors $f$ est croissante.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une fonction dérivable à dérivée nulle sur son domaine de définition est constante.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f$ est dérivable et strictement croissante, alors $f'$ est strictement positive.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $f'(0) > 0$ , alors il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq f(0)$ pour tout $x \in [0, \eta[$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la dérivée de $f$ est strictement positive en $a$ , alors $f$ est strictement croissante sur un voisinage de $a$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f$ admet un minimum en $a$ , alors il existe $\eta > 0$ tel que $f$ soit croissante sur $[a, a + \eta[$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

1. La dérivée de  $x \mapsto \frac{2x^2-1}{1-x^2}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  est

a.  $x \mapsto \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$

c.  $x \mapsto \frac{6x}{(x^2-1)^2}$

b.  $x \mapsto \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

d.  $x \mapsto \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

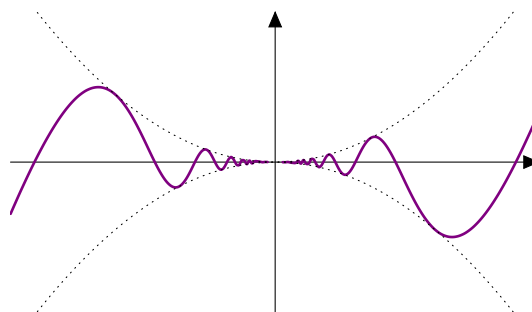
2. La fonction  $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$  prolongée par continuité en 0 est

a. n'est pas dérivable 0

c. de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de 0

b. seulement dérivable en 0

d. de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de 0



3. La fonction  $x \mapsto \arcsin(\sin x)$  est dérivable sur

a.  $\mathbb{R}$

b.  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

c.  $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

d.  $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

## Calculs

### Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer la dérivée des fonctions composées  $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(1-x)^2}$ ,  $x \mapsto \ln(1 + \cos^2(x))$ ,  $x \mapsto \arctan \frac{1}{x^2}$  et  $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$ .

### Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer la dérivée  $n$ -ième des fonctions  $x \mapsto x^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x \mapsto \ln x$ .

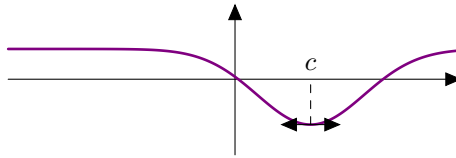
### Exercice

Tracer le tableau de variations de  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(2+x)}$ .

## Exercices de révision

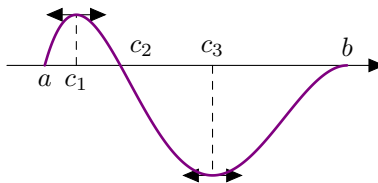
### Exercice

Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f \in \mathbb{R}$ .  
Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .



### Exercice

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(a) = f(b) = 0$  et  $f'(a)f'(b) > 0$ .  
Montrer qu'il existe  $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$  tels que  $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$ .



### Exercice

Déterminer les fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et à dérivée majorée par  $M$  telles que  $f(b) - f(a) = M(b - a)$ .

### Exercice

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et dérivable telle que  $f'$  tend vers  $\ell$  en  $+\infty$ . Montrer que  $\ell = 0$ .

# 7 – Études locales

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit reprendre la liste des développements limités usuels en 0, énoncer la formule de Taylor-Young.

## Vrai/Faux

	V	F
$x \cos \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\frac{1}{x} \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la fonction $\exp \circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ , alors la fonction $f$ admet une limite finie en $+\infty$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la fonction $\ln \circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ , alors la fonction $f$ admet une limite finie en $+\infty$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ , alors $f$ est nulle sur un voisinage de $a$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f(x) \underset{0}{=} o(x)$ , alors $f(x)^2 \underset{0}{=} o(x^2)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f(x) \underset{0}{\sim} h(x)$ , alors $xf(x) \underset{0}{\sim} (x+1)h(x)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La partie régulière du $DL_n(0)$ d'une fonction paire est paire.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La partie régulière du $DL_n(0)$ d'une fonction périodique est périodique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f$ admet un $DL_n(a)$ , alors $x \mapsto f(x+a)$ admet un $DL_n(0)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $f$ est deux fois dérivable en 0 et $f(x) = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$ , alors $f''(0) = b$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

- $\sin\left(\frac{1}{n+2}\right) \sim$ 
  - $\frac{1}{n+2}$
  - $\frac{1}{n}$
  - 0
  - $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim$ 
  - 1
  - $\frac{1}{2\sqrt{n}}$
  - $2\sqrt{n}$
  - 0
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} =$ 
  - $e^6$
  - $e^{\frac{3}{2}}$
  - $e^{\frac{2}{3}}$
  - $+\infty$
- $\frac{x+2}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim}$ 
  - $\frac{1}{x}$
  - $\frac{1}{x} + 1$
  - $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
  - $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$
- $\frac{e^{3x}}{e^{2x}-1} \underset{0}{\sim}$ 
  - $\frac{1}{x}$
  - $\frac{1}{2x}$
  - $e^x$
  - $e^{3x}$

6. Le terme d'ordre  $n$  dans le DL en 0 de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  est
- a.  $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{1}$       b.  $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}$       c.  $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1}$       d.  $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$
7. Le terme d'ordre  $2n$  dans le DL en 0 de  $x \mapsto \ln(1+x^2)$  est
- a.  $\frac{1}{2n}$       b.  $-\frac{1}{2n}$       c.  $\frac{1}{n}$       d.  $-\frac{1}{n}$
8. Le terme d'ordre  $2n$  dans le DL en 0 du prolongement continu de  $x \mapsto \operatorname{th} \frac{1}{x^2}$  est
- a. 0      b. 1      c.  $\frac{1}{n!}$       d.  $\frac{1}{n!}$

## Exercices de révision

### Exercice

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ .

Déterminer parmi les affirmations suivantes celles qui sont correctes

1.  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .      3.  $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .
2.  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .      4.  $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

### Exercice

Déterminer le DL en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

1.  $x \mapsto \arctan x$  à l'ordre 5.      3.  $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$  à l'ordre 5.
2.  $x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{\cos(x)}$  à l'ordre 5.

### Exercice

Soit  $f$  et  $g$  des fonctions réelles telles que

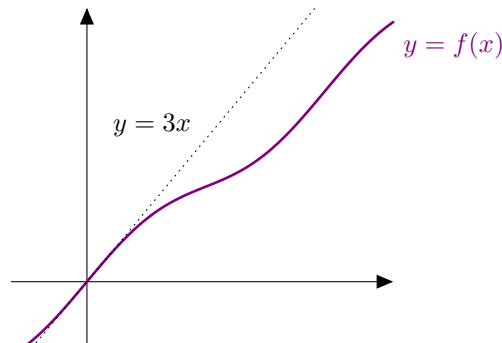
$$f(x) \underset{0}{=} x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4), \quad g(x) \underset{0}{=} -x^3 + 2x^4 + o(x^6).$$

Déterminer l'ordre maximal auquel on peut développer en 0 les fonctions  $f+g$ ,  $f \times g$ ,  $\frac{g}{f}$ ,  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

### Exercice

Soit  $f : x \mapsto 2x + \sin x$ .

1. Montrer que  $f$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer un DL à l'ordre 3 en 0 de  $f^{-1}$ .



# 8 – Équations différentielles

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit se souvenir des solutions des équations linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2.

## Vrai/Faux

	V	F
Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y' = a(x)y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{a(x)x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y' = \frac{1}{1+x^2}y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{\arctan(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y' = iy$ sont de la forme $x \mapsto A \cos x + B \sin x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y' + ay = 0$ sont deux à deux proportionnelles.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y'' + ay' = 0$ sont deux à deux proportionnelles.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y'' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto A \cos x + B \sin x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les solutions de $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont de la forme $x \mapsto e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

1.  $x \mapsto e^{2x}$  est solution de

a.  $y'' = 2y' + y$

b.  $y'' = y' + y$

c.  $y''' = 4y'$

d.  $y' + 2y = 0$

2. sin et cos sont solutions de

a.  $y'' = y$

b.  $y'' = -y$

c.  $y^{(4)} = y$

d.  $y^{(4)} = -y$

3. Si  $f$  est solution de  $y' = ay + b(x)$ , les autres solutions sont

a.  $x \mapsto Cf(x) + e^{ax}$  avec  $C \in \mathbb{R}$

b.  $x \mapsto f(x) + Ce^{ax}$  avec  $C \in \mathbb{R}$

c.  $x \mapsto f(x) + e^{ax} + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$

d.  $x \mapsto f(x) \times e^{ax} + C$  avec  $C \in \mathbb{R}$

## Calcul

### Exercice

Soit  $\omega > 0$ . Résoudre l'équation  $y'' - \omega^2 y = e^{\omega x}$ .



## Exercices de révision

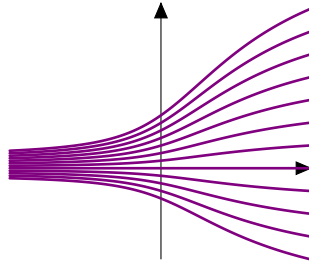
### Exercice

Commenter l'affirmation (correcte mais peu pertinente) suivante :

*Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de l'équation  $y' = 2y$ , alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = Ae^{3x}$ .*

### Exercice

Justifier que les courbes représentatives des solutions distinctes d'une équation différentielle d'ordre 1 forment une partition du plan.

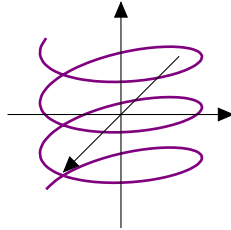


### Exercice

Soit  $\omega > 0$ . Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe  $Oz$  est régi par le système différentiel (en la variable  $t$ ) suivant

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

En considérant la fonction auxiliaire  $u = x' + iy'$ , résoudre ce système différentiel.



### Exercice (Lemme de Gronwall, $\clubsuit$ )

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues et  $A \geq 0$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t) dt.$$

En introduisant la fonction  $\varphi : x \mapsto A + \int_0^x f(t)g(t) dt$ , montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right).$$

# 9 – Intégration

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit réviser les primitives usuelles puis énoncer les formules d'intégration par parties et de changement de variables.

## Vrai/Faux

	V	F
$\int_2^3 x \, dx = \frac{5}{2}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $z \in \mathbb{C}$ non-nul. Une primitive de $x \mapsto \exp(zx)$ est $x \mapsto \frac{1}{z} \exp(zx)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x \ln x - x - 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une primitive de $x \mapsto \ln(1-x)$ est $x \mapsto (1-x) \ln(1-x) - (1-x)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une primitive de $x \mapsto \sin^2(2x)$ est $x \mapsto \frac{1}{6} \sin^3(2x)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est $x \mapsto \frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$ est $x \mapsto \arctan \frac{x}{a}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une primitive de $x \mapsto \cos(-x+1)$ est $x \mapsto \sin(x-1)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une primitive de $\tan$ est $x \mapsto -\ln  \cos x $ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

- Les primitives d'une fonction impaire non nulle sont
  - toutes paires
  - toutes impaires
  - pour certaines ni paire, ni impaire
  - périodiques
- Une primitive de  $x \mapsto \ln(x)$  est
  - $x \mapsto x \ln x - 1$
  - $x \mapsto x \ln x + 1$
  - $x \mapsto x \ln x - x$
  - $x \mapsto x \ln x + x$
- Une primitive de  $x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$  est
  - $x \mapsto \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$
  - $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$
  - $x \mapsto 2 e^{-\frac{x^2}{2}}$
  - $x \mapsto e^{-x^3}$
- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. La dérivée de  $x \mapsto \int_{-x}^x f(t) \, dt$  est
  - $x \mapsto 2f(x)$
  - $x \mapsto f(x) - f(-x)$
  - $x \mapsto f(x) + f(-x)$
  - $x \mapsto 0$

## Calculs

### Exercice

Calculer les intégrales suivantes

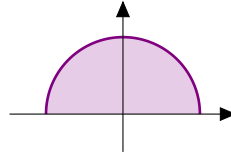
- $\int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t \, dt$
- $\int_0^{\pi/2} \sin t \cos^3 t \, dt$
- $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, dt$
- $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^3 t \, dt$

**Exercice**

Calculer les intégrales suivantes

1.  $\int_0^1 t^2 e^t dt$

2.  $\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt$

**Exercice**Déterminer les primitives de  $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+x+1}$ .**Exercices de révision****Exercice**Justifier sans calcul que  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/2$ .**Exercice (Intégrales de Wallis)**Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

1. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite  $(W_n)_n$ .
2. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite  $(I_n)_n$ .
3. En posant  $t = \tan \theta$ , relier  $I_n$  à des termes de la suite  $(W_n)_n$ .

**Exercice**À l'aide d'une intégration par parties, calculer un équivalent en  $+\infty$  de  $x \mapsto \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ .

L'IPP sert alternativement à faire baisser le degré de polynômes, faire disparaître des fonctions à dérivées simples, obtenir des équivalents de primitives (en trouvant un crochet « dominant » la nouvelle intégrale), trouver des relations de récurrence...

**Exercice**

Posons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)}} dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)}} dx.$$

1. Calculer  $I + J$
2. Montrer que  $I = J$  et en déduire la valeur de  $I$ .

INDICATION : on pourra utiliser le changement de variable  $y = \frac{\pi}{2} - x$ .

# 10 – Séries numériques

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler la nuance entre convergence et convergence absolue, la règle de convergence pour les séries de Riemann, les règles de comparaison (inégalité, grand  $O$ ).

## Vrai/Faux

	V	F
Si la série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ converge, alors la suite $u_n$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la suite $u_n$ converge vers 0, alors la série de terme général $u_n$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La série de terme général $n^{-\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La série de terme général $\rho^n$ converge si, et seulement si, $ \rho  < 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La série de terme général $n\rho^n$ converge si, et seulement si, $ \rho  < 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la série de terme général $u_n$ converge, alors la série de terme général $ u_n $ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La série de terme général $\cos(n)$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si la série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ converge, alors la série de terme général $u_n^2$ converge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La somme de deux séries divergentes est divergente.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Calculs

### Exercice

Déterminer les  $r \geq 0$  tels que la série de terme général  $(2 + \frac{1}{n})^n r^n$  converge.

### Exercice

Soit  $\alpha > 0$ .

1. Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ .

INDICATION : on pourra reconnaître une fonction de la forme  $\frac{u'}{u}$ .

2. En déduire la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ .

### Exercice

Soit  $\alpha > 1$ . Déterminer un équivalent du reste de la série de Riemann  $\frac{1}{n^\alpha}$ .

INDICATION : on pourra utiliser la méthode des « rectangles », c'est-à-dire la comparaison à une intégrale.

### Exercice

Déterminer un équivalent de  $\frac{1}{\sum_{k=2}^n (\ln k)^2}$ .

INDICATION : on pourra à nouveau utiliser la méthode des « rectangles », c'est-à-dire la comparaison à une intégrale.

## Exercices de révision

### Exercice

Soit  $P, Q$  deux polynômes tels que  $Q$  n'admet pas de racine dans  $\mathbb{N}$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\deg P, \deg Q$  pour que la série de terme général  $P(n)/Q(n)$  converge.

### Exercice

Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels positifs. Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge si, et seulement si, la série de terme général  $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$  converge.

INDICATION : on pourra, pour le sens retour, exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ .

### Exercice

Déterminer les suites  $(u_n)_n$  périodiques telles que la série de terme général  $u_n$  converge.

### Exercice (♠)

Observer la figure en couverture de ce cahier de vacances : le cercle inscrit dans le  $n+1$ -gone régulier a le même rayon que le cercle circonscrit au  $n$ -gone régulier précédent ; justifier que cette figure admet une taille limite (que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement).

### Exercice

Déterminer les  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \alpha \ln n$$

converge.

### Exercice

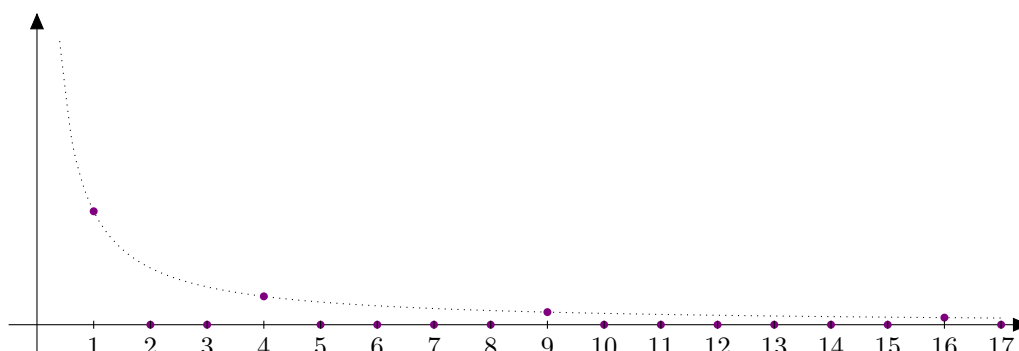
1. Soit  $(u_n)_n$  une suite décroissante telle que la série de terme général  $u_n$  converge.

(a) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ .

(b) Montrer que  $u_n = o(\frac{1}{n})$ .

INDICATION : on pourra considérer une quantité de la forme  $\sum_{k=n}^{2n} u_k$ .

2. Exhiber une suite  $(u_n)_n$  positive telle que la série de terme général  $u_n$  converge et  $u_n \neq o(\frac{1}{n})$ .



# 11 – Polynômes

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les définitions et caractérisations de racines multiples, la décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

## Vrai/Faux

	V	F
Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P \neq \deg Q$ , $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ , $\deg(-P) = -\deg P$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un polynôme constant est de degré nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le reste dans la division entre deux polynômes à coefficients entiers est à coefficients entiers.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $z \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{C}[X]$ , alors, $\bar{z}$ l'est aussi.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $n > 2$ . $X^n - nX + 1$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$z$ est une racine multiple de $P$ si, et seulement si, $P'(z) = 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les racines $(X^2 + X + 1)^2$ sont simples.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les racines $X^{2n} - 1$ sont simples.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$X^4 + X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

- Soit  $P$  de degré  $n \in \mathbb{N}$ , alors le degré de  $X^n P(\frac{1}{X})$  est
  - $n$
  - non défini (ce n'est pas un polynôme)
  - $n - 1$
  - ça dépend
- Les racines rationnelles de  $3X^5 + 1515X + 7$  sont
  - $\pm \frac{7}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1, \pm 7$
  - $\pm \frac{3}{7}, \pm \frac{1}{7}, \pm 1, \pm 3$
  - inexistantes
  - parmi  $\pm \frac{7}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1, \pm 7$
- Le complexe  $i$  est racine de  $iX^2 - iX - 1 - i$ ; l'autre racine est
  - $1 + i$
  - $1 - i$
  - $-1 - i$
  - $-1 + i$
- La somme des racines complexes (comptées avec leur multiplicité) de  $X^{1515} + 18X^{1514} + 42X + 7$  est
  - 18
  - 18
  - 7
  - 7

## Calculs

### Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 + 1$ .

### Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X - 1)^3$ .

### Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^{2n+1} + 1$ .

## Exercices de révision

### Exercice

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k.$$

Montrer que les racines de  $P_n$  sont simples.

### Exercice

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ .

### Exercice

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  unitaire dont toutes les racines complexes sont de module supérieur ou égal à 1. Montrer que si  $P(0) = -1$ , alors  $P(-1) = 0$ .

### Exercice

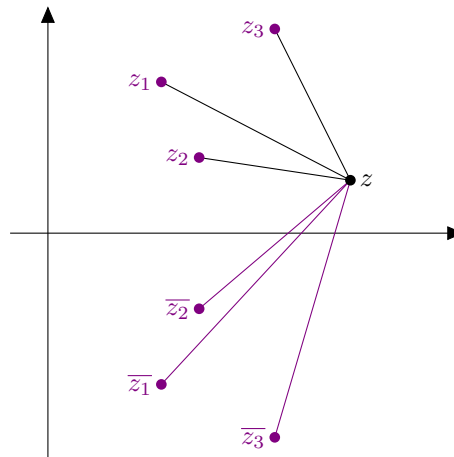
Montrer qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  non constant unitaire est scindé sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|P(z)| \geq |\Im(z)|^{\deg P}$ .

### Exercice (♣)

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non constant dont toutes les racines appartiennent au demi-plan complexe d'équation  $\Im(z) > 0$ .

Soit  $A$  (respectivement  $B$ ) le polynôme obtenu à partir de  $P$  en remplaçant les coefficients par leurs parties réelles (respectivement imaginaires).

Montrer que les racines  $A$  sont réelles.

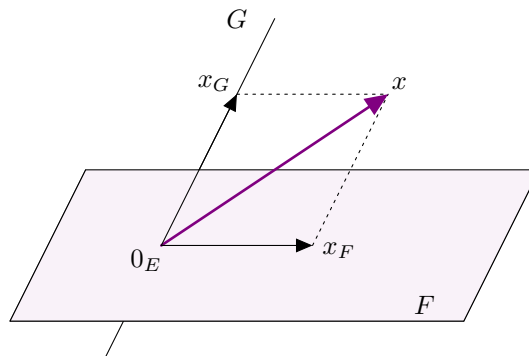


# 12 – Espaces vectoriels

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les caractérisations de sous-espace, d'application linéaire et les définitions de somme directe et de supplémentaires.

## Vrai/Faux

	V	F
Soit $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $F + G = F \cap G$ . Alors, $F = G$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{Vect}(\emptyset) = \emptyset$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $A, B$ deux parties de $E$ . Alors, $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}A + \text{Vect}B$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires est libre.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est une combinaison linéaire de ces vecteurs.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est une combinaison linéaire de deux de ces vecteurs.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $G$ et $H$ sont supplémentaires dans $E$ et $F$ est un sous-espace de $E$ , alors $G \cap F$ et $H \cap F$ sont des supplémentaires dans $F$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



## QCM

- Parmi les familles suivantes, lesquelles sont des bases de  $\mathbb{R}[X]$ .
  - $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$
  - $((X + 1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$
  - $(1 \cdot X \cdot (X + 1) \dots (X + n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$
  - Les polynômes de Lagrange associés aux entiers  $1, \dots, n$
- Parmi les sous-espaces suivants, lesquels sont des supplémentaires de l'espace des polynômes pairs dans  $\mathbb{R}[X]$ .
  - l'espace  $\mathcal{I}$  des polynômes impairs
  - $\{P(X) + X^2, P \in \mathcal{I}\}$
  - $\{P, P(1) = 0\}$
  - $\text{Vect}(X^{3n})_{n \in \mathbb{N}}$



3. Les sous-espaces  $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(1) = 0\}$  et  $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y' = y\}$  sont
- |   |   |
|---|---|
| a. complémentaires dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ | c. en somme directe   |
| b. supplémentaires dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ | d. de somme égale à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ |

## Exercices de révision

### Exercice

Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  :

1. l'ensemble des suites positives à partir d'un certain rang
2. l'ensemble des suites bornées
3. l'ensemble des suites majorées par le premier terme
4. l'ensemble des suites monotones
5. l'ensemble des suites somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante
6. l'ensemble des suites convergentes
7. l'ensemble des suites périodiques

Pour montrer que  $F$  est un espace-vectoriel, on montre souvent qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $E$  ; il faut pour cela les trois points suivants :

- $F \subset E$  (souvent évident mais il faut le dire)
- $F \neq \emptyset$  (souvent on indique que  $0_E \in F$ )
- $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F$ .

### Exercice

Remplir les boites  avec l'un des symboles suivants  $\Leftarrow, \Rightarrow$  ou  $\Leftrightarrow$ .

1. Soit  $x, y$  et  $z$  éléments d'un espace vectoriel  $E$ . Alors,

$$(x, y, z) \text{ liée } \input{type="text"} x \in \text{Vect}(y, z)$$

2. Soit  $A, B$  des parties d'un espace vectoriel  $E$ . Alors,

$$A \subset B \input{type="text"} \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$$

3. Soit  $F, G$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . Alors,

$$F \cup G \text{ sev } \input{type="text"} F \subset G$$

4. Soit  $F, G$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . Alors,

$$F + G = G \input{type="text"} F \subset G$$

### Exercice

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tels que  $F + G = E$ . Notons  $F'$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $F$ . Montrer que  $E = F' \oplus G$ .

### Exercice

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x, y \in E$ .

Montrer que  $F + \text{Vect}(x) = F + \text{Vect}(y)$  si, et seulement si, il existe  $z \in F$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  tels que  $\alpha\beta \neq 0$  et  $z + \alpha x + \beta y = 0_E$ .

# 13 – Applications linéaires

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit écrire la définition de noyau et d'image d'une application linéaire.

## Vrai/Faux

	V	F
Soit $A \subset E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors, $u(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(u(A))$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $G, H$ deux sous-espaces de $E$ , alors $u(G + H) = u(G) + u(H)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors $\text{Im}u$ et $\text{Ker}u$ sont supplémentaires.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors $\text{Im}u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\text{Ker}u$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ , alors $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u \circ v = 0$ . Alors, $u = 0$ ou $v = 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p$ est un projecteur si, et seulement si, $\text{Id} - p$ est un projecteur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p$ est un projecteur si, et seulement si, $-p$ est un projecteur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $p$ est un projecteur, alors $p - 2\text{Id}$ est une symétrie.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $p$ est un projecteur, alors $\text{Im}p = \text{Ker}(p - \text{Id})$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

- L'application  $u : (x, y, z) \mapsto (2z, -y, \frac{1}{2}x)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ 
  - n'est pas linéaire;
  - est une homothétie;
  - est un projecteur;
  - est une symétrie.
- L'application identité d'un espace vectoriel  $E$  est
  - inversible;
  - une homothétie;
  - un projecteur;
  - une symétrie.
- L'application nulle d'un espace vectoriel  $E$  est
  - inversible;
  - une homothétie;
  - un projecteur;
  - une symétrie.

Pour un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on considère souvent le sous-espace (appelé sous-espace propre) de  $u$  défini par  $\text{Ker}(u - \lambda\text{Id})$ ; c'est l'ensemble des vecteurs  $x \in E$  tels que  $u(x) = \lambda x$ . En particulier, pour  $\lambda = 1$ , on retrouve les vecteurs « invariants » par  $u$ .

## Exercices de révision

### Exercice

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  distincts. Montrer que les sous-espaces  $\text{Ker}(u - \lambda\text{Id})$  et  $\text{Ker}(u - \mu\text{Id})$  sont en somme directe.

### Exercice

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u \circ v$  est l'endomorphisme nul si, et seulement si,  $\text{Im} v \subset \text{Ker} u$ .

**Exercice**

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

1. Montrer que  $u(\text{Ker } v) \subset \text{Ker } v$
2. Montrer que  $u(\text{Im } v) \subset \text{Im } v$ .

**Exercice**

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Établir l'équivalence entre  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$  et  $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0_E\}$ .
2. Établir l'équivalence entre  $\text{Im } u = \text{Im } u^2$  et  $E = \text{Ker } u + \text{Im } u$ .

On se rappelle qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ.

**Exercice (♠)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et un endomorphisme  $u$  de  $E$  tel qu'il existe  $x_0 \in E$  vérifiant que  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

Montrer qu'il existe des scalaires  $(a_k)_{k \in [0, n-1]}$  tels que

$$u^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k.$$

**Exercice**

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p$  un projecteur de  $E$ . Définissons les sous-espaces

$$F_1 = \{v \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), v = u \circ p\},$$

$$F_2 = \{v \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), v = u \circ (\text{Id} - p)\}.$$

Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathcal{L}(E)$ .

# 14 – Dimension

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit citer la formule du rang pour une application linéaire, la formule pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.

## Vrai/Faux

	V	F
Soit $N > 0$ . L'espace des suites réelles $N$ -périodiques est de dimension finie.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
L'espace des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodiques et nulles en 0 est de dimension finie.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De toute famille génératrice d'un espace de dimension finie, on peut extraire une base.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tout vecteur d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complété en une base.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $F$ et $(g_1, \dots, g_p)$ est une base de $G$ , alors $\{f_1, \dots, f_n\} \cap \{g_1, \dots, g_p\}$ est une base de $F \cap G$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $F$ un sous-espace d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie. Alors, $E = F$ si, et seulement si, $\dim E = \dim F$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $E$ et $F$ sont de dimensions finies, alors $\dim \mathcal{L}(E, F) = (\dim F)^{\dim E}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $E, F$ de dimension finie et $u$ injective, alors $\dim E \leq \dim F$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

- Soit  $x$  un vecteur non nul de l'espace  $E$  de dimension  $n$ . La dimension de  $\{u(x), u \in \mathcal{L}(E)\}$  est
  - $n$
  - $n^2$
  - 1
  - cela dépend de  $x$
- Soit  $F$  sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de l'espace  $E$  de dimension  $n$ . La dimension de  $\{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset F\}$  est
  - $p^2$
  - $p^2 + n(n-p)$
  - $p^2 + (n-p)^2$
  - $p^2 + p(n-p)$
- Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'image d'une base de  $E$  par  $u$  est
  - une base de  $F$
  - une base de  $\text{Im } u$
  - génératrice de  $F$
  - génératrice de  $\text{Im } u$
- Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que l'image d'une base de  $E$  par  $u$  est libre. Alors,
  - $u$  est injective
  - $u$  est surjective
  - $\text{Ker } u \cap F = \{0_F\}$
  - $\dim F \geq \dim E$

## Exercices de révision

### Exercice

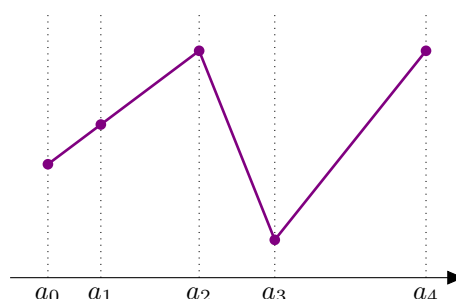
Soit  $n \geq 1$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  non nul.

1. Montrer que l'ensemble  $F_P$  des polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  multiples de  $P$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. En déduire la dimension de  $F_P$  en fonction du degré de  $P$ .

### Exercice

Soit  $a_0 < a_1 < \dots < a_N$ .

Montrer que l'espace  $E$  des fonctions continues sur  $[a_0, a_N]$ , affines par morceaux pour la subdivision  $a_0 < a_1 < \dots < a_N$  est de dimension  $N + 1$ .



### Exercice

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $H$  un hyperplan de  $E$  (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$ ) et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Déterminer toutes les valeurs possibles de  $\dim F \cap H$  en fonction de  $\dim F$ .

Une hypothèse de dimension permet souvent d'éliminer une moitié du raisonnement d'existence et unicité dans le tableau suivant

Résultat à établir	Existence	Unicité
$E_1, E_2$ supplémentaires dans $E$	$E = E_1 + E_2$	$E_1, E_2$ en somme directe
$(e_1, \dots, e_n)$ base de $E$	$(e_1, \dots, e_n)$ génératrice de $E$	$(e_1, \dots, e_n)$ libre
$u \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective	$u \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective	$u \in \mathcal{L}(E, F)$ injective

### Exercice

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P_n - P'_n = X^n$ .

### Exercice

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $u \in \text{GL}(E)$  tel que  $u(F) = G$ .

### Exercice

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $u \in \text{GL}(E)$  et  $v \in \mathcal{L}(E)$ .

Montrer que  $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(v)$ .

# 15 – Matrices

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit revoir la formule du calcul du produit matriciel.

## Vrai/Faux

	V	F
La dimension de l'espace des matrices triangulaires supérieures est $\frac{n(n+1)}{2}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La dimension de l'espace des matrices symétriques est $\frac{n(n+1)}{2}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée de matrices de rang 1.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée de matrices inversibles.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible et de dernière colonne non nulle. Alors, la dernière colonne de $A$ est combinaison linéaire des autres colonnes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe deux colonnes non nulles $X, Y$ telles que $M = XY^T$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## QCM

- Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . L'ensemble des solutions du système  $AX = B$  est
  - réduit à un vecteur
  - vide
  - un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
  - infini
- Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'ensemble des solutions du système  $AX = B$  est
  - réduit à une matrice
  - vide
  - un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
  - infini
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des vecteurs  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que  $AX = \lambda X$  est
  - réduit à un vecteur
  - vide
  - un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
  - infini
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Si le système  $AX = B$  admet des solutions, alors
  - $A$  est inversible
  - $\text{Ker } A$  est vide
  - $B \in \text{Im } A$
  - $A$  est surjective

## Calculs

### Exercice

Déterminer les puissances de la matrice  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

**Exercice**

Calculer la puissance  $n - 1$ -ième de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ .

**Exercice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculer  $E_{i,j}A$  et  $AE_{i,j}$  (où  $E_{i,j}$  est la matrice de la base canonique avec un seul coefficient égal à 1 en position  $(i, j)$ ).

Remarquons que pour des matrices  $A, B$ , la  $k$ -ième ligne du produit  $AB$  est  $L_k(AB) = L_k(A)B$ . En particulier, si la  $k$ -ième ligne de  $A$  est nulle, alors la  $k$ -ième ligne de  $AB$  est nulle

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \star & \star & \star & \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \star \end{bmatrix}$$

De même, la  $k$ -ième colonne du produit  $AB$  est  $C_k(AB) = AC_k(B)$  et si la  $k$ -ième colonne de  $B$  est nulle alors la  $k$ -ième colonne de  $AB$  est nulle.

**Exercices de révision****Exercice**

Montrer que le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est un supplémentaire dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de l'espace des matrices antisymétriques.

**Exercice**

Une matrice  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est en damier si  $m_{i,j} = 0$  pour tout  $(i, j)$  tel que  $j = i + 1$  [2].

1. Montrer que l'ensemble des matrices en damier est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que cet ensemble est stable par produit.
3. Préciser sa dimension dans le cas  $n$  pair.

**Exercice**

1. Soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Calculer  $Y^T Y$  puis montrer que cette quantité est positive.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
  - (a) Justifier que  $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^T A$ .
  - (b) Montrer l'autre inclusion.
  - (c) En déduire que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T A)$ .

# 16 – Déterminants

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit énumérer les méthodes de calculs de déterminants.

## Vrai/Faux

	V	F
Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers positifs est un entier positif.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(AB) = \det(A) \det(B)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A^T) = \det(A)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est 1 ou $-1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Si une matrice est inversible, son inverse est la transposée de sa comatrice.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Calculs

### Exercice

Soit  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Factoriser le déterminant suivant

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

### Exercice

Notons, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $S_k = \sum_{i=1}^k i$ . Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}.$$

### Exercice

1. Soit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Calculer le déterminant de la matrice déduite de  $I_n$  en remplaçant la  $i$ -ième ligne par  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $i, j \leq n$ . Calculer  $\det(I_n + E_{i,j}A)$ .

### Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Calculer le déterminant par blocs :  $\begin{vmatrix} 0 & I_p \\ A & 0 \end{vmatrix}$ .



**Exercice**

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ . Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}.$$

**Exercices de révision****Exercice**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Justifier que l'application

$$x \mapsto \begin{vmatrix} b+x & c+x & \cdots & c+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ a+x & \cdots & a+x & b+x \end{vmatrix}$$

est affine.

**Exercice**

Considérons l'endomorphisme  $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $u : M \mapsto M + \text{tr}(M)\mathbf{I}_n$ .

1. Déterminer la matrice de  $u$  dans les bases suivantes :

- (a)  $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{n,n})$ , la base canonique considérée « ligne après ligne » ;
- (b)  $(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2}, \dots, E_{n-1,n})$  la base canonique en commençant par les éléments de la diagonale ;
- (c)  $(\mathbf{I}_n, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2}, \dots, E_{n-1,n})$  la précédente en remplaçant  $E_{1,1}$  par  $\mathbf{I}_n$ .

2. En déduire  $\det(u)$ .

**Exercice**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall j \leq n, \quad C_j(M') = \sum_{k \neq j} C_k(M).$$

Calculer  $\det M'$  en fonction de  $\det M$ .

**Exercice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in [0, \varepsilon]$  tel que  $A + \lambda \mathbf{I}_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

# 17 – Probabilités

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les manipulations des probabilités, d'espérances et la notion d'indépendance.

## Vrai/Faux

	V	F
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\Omega$ et $A \subset \Omega$ . Si $\mathbb{P}(A) = 0$ , alors $A = \emptyset$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $A, B \subset \Omega$ de probabilités dans $]0, 1[$ . Alors, $\mathbb{P}(A B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B A)\mathbb{P}(A)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $A, B$ de probabilité dans $]0, 1[$ . Alors, pour tout $B \subset \Omega$ , $\mathbb{P}(B A) + \mathbb{P}(B \bar{A}) = 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Deux événements disjoints sont indépendants.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Deux événements indépendants sont disjoints.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $A, B$ et $C \subset \Omega$ des événements tels que $A$ et $B$ sont indépendants et $B$ et $C$ sont indépendants. Alors, $A$ et $C$ sont indépendants.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La somme de variables indépendantes de loi uniforme suit une loi uniforme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour toute variable réelle discrète $X$ , $\mathbb{E}( X ) \leq  \mathbb{E}(X) $ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour toute variable réelle discrète $X$ , $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Calculs

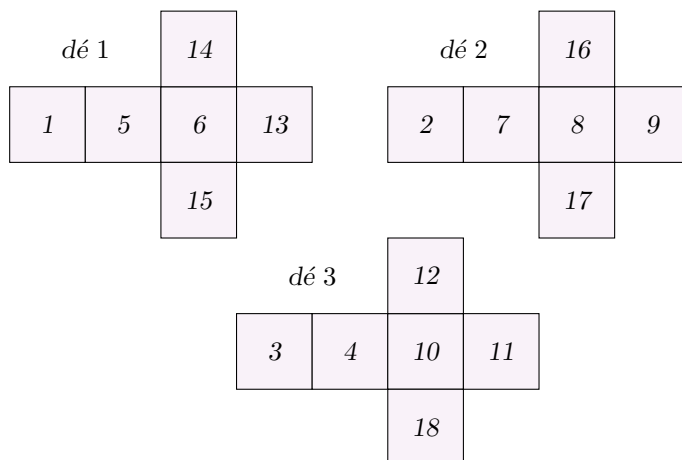
### Exercice (« paradoxe » du chevalier de Méré)

Considérons des dés équilibrés et des lancers indépendants.

1. Comparer la probabilité d'obtenir un 6 en lançant un dé et la probabilité d'obtenir un double 6 en lançant deux dés.
2. Comparer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant un dé quatre fois et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 en lançant deux dés vingt-quatre fois.

### Exercice

Considérons trois dés équilibrés à six faces étiquetés respectivement selon les « patrons » suivants :



Notons  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  les variables aléatoires correspondant au lancer de chacun de ces dés.

1. Calculer  $\mathbb{E}(X_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
2. Montrer que les trois probabilités  $\mathbb{P}(X_2 > X_1)$ ,  $\mathbb{P}(X_3 > X_2)$  et  $\mathbb{P}(X_1 > X_3)$  sont strictement supérieures à  $\frac{1}{2}$ .

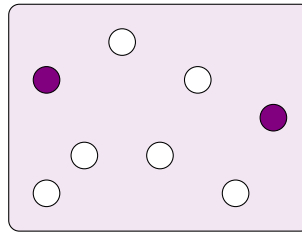
**Exercice**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  et  $Y$  la variable telle que la loi de  $Y$  sachant  $X = k$  est uniforme sur  $\{1, 2, \dots, k\}$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Déterminer la loi de  $Y$ .

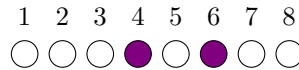
**Exercice**

Soit  $n \geq 3$  un entier. Une urne contient 2 boules colorées et  $n - 2$  boules blanches. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

Par exemple, une réalisation du tirage de l'urne suivante avec  $n = 8$



est



1. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $T_1$  égale au numéro du tirage de la première boule colorée.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $T_2$  égale au numéro du tirage de la seconde boule colorée.

**Exercices de révision****Exercice**

Compléter le tableau suivant :

loi	espérance	variance	fonction génératrice	interprétation
$\mathcal{B}(p)$				loi d'une indicatrice d'un événement de probabilité $p$ .
$\mathcal{B}(n, p)$				nombre de succès en $n$ expériences indépendantes où la probabilité de succès est $p$ somme de $n$ variables de loi $\mathcal{B}(p)$ indépendantes.

La fonction génératrice d'une variable  $X$  est la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}(t^X)$ .

**Exercice**

Soit  $a \leq m \leq b$ . Déterminer le maximum de  $\mathbb{E}(X^2)$  lorsque  $X$  parcourt l'ensemble des variables aléatoires discrètes à valeurs dans l'intervalle  $[a, b]$  d'espérance  $m$ .

# 18 – Espaces euclidiens

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler la définition de produit scalaire, développer  $\|x + y\|^2$ , puis donner l'expression de la projection orthogonale en base orthonormée (ou seulement orthogonale).

## Vrai/Faux

	V	F
$(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(A, B) \mapsto \text{tr}(AB^T)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . $(X, Y) \mapsto X^T S Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ . $(P, Q) \mapsto \sum_{k=1}^n P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $x$ et $y$ deux vecteurs d'un espace euclidien de même norme. Alors, $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $x$ et $y$ deux vecteurs d'un espace euclidien. Alors, $\ x + y\ ^2 = \ x\ ^2 + 2\langle x y \rangle + \ y\ ^2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $x$ et $y$ deux vecteurs d'un espace euclidien. Alors, $x$ et $y$ sont orthogonaux si, et seulement si $\ x + y\ ^2 = \ x\ ^2 + \ y\ ^2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Alors,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $x$ et $y$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

Toute famille orthogonale d'un espace euclidien est libre.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tout espace euclidien admet une base orthonormée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout produit scalaire, $\mathbb{R}[X]$ admet une base orthonormée échelonnée en degré.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour toute partie $A$ d'un espace euclidien, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace euclidien $E$ , $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tous sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un espace euclidien, $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pour tous sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un espace euclidien, $(F \cup G)^\perp = (F + G)^\perp$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Exercices de révision

L'inégalité de Cauchy-Schwarz apparaît dans des situations où le cadre « euclidien » n'est pas forcément apparent.

### Exercice

Soit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $x_1 + \dots + x_n = 1$ . Montrer que  $n^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$ .

### Exercice

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Montrer que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}.$$

### Exercice

Montrer que deux vecteurs  $x, y$  d'un espace euclidien sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

### Exercice

Soit  $\mathbb{R}_n[X]$  muni de  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$  et  $P$  un polynôme non-nul de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ .

1. Préciser le degré de  $P$ .
2. Montrer que la fonction  $R : x \mapsto \int_0^1 P(t)t^x dt$  est rationnelle.
3. Trouver  $R$  à une constante multiplicative près.
4. En déduire les coefficients de  $P$ .
5. En déduire une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Exercice

Rappeler la relation entre la projection orthogonale sur  $F$  et la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

